VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SE ZPOŽDĚNÍM
DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR
JIŘÍ KRÁČMAR

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR
Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.

BRNO 2011

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky
Akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jiří Kráčmar

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Diferenciální rovnice se zpožděním

v anglickém jazyce:

Delay differential equations

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Diferenciální rovnice se zpožděním jsou diferenciální rovnice, které obsahují v argumentu neznámé funkce funcki tzv. zpoždění. Ta v praxi může reprezentovat např. časovou prodlevu potřebnou k reakci na změnu stavu a tedy reálněji popisovat některé matematické modely. Na druhou stranu charakteristika rovnic se zpozděným argumentem je v mnoha směrech obtížnější než u obyčejných rovnic.

Cíle bakalářské práce:

Charakterizace diferenciálních rovnic se zpožděním a popis některých základních metod řešení. Dále budou zkoumány vlastnosti těchto rovnic resp. jejich řešení a srovnány s analogickými vlastnostmi obyčejných diferenciálních rovnic. Získané poznatky budou aplikovány na konkrétním matematickém modelu.

Seznam odborné literatury:

V. KOLMANOVSKII, A. MYSHKIS, Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations
T. ERNEUX, Applied Delay Differential Equations
J.D. MURRAY, Mathematical Biology

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 19.11.2010

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. Ředitel ústavu	prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc. Děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou diferenciálních rovnic se zpožděním, které na rozdíl od obyčejných diferenciálních rovnic, obsahují v argumentu neznámé funkce funkci tzv. zpoždění a díky tomu mohou přesněji popisovat některé reálné systémy, jenž se snažíme převést do matematického modelu. V praxi to jsou systémy, v nichž se vyskytují například časové prodlevy potřebné k reakci systému na změnu stavu.
Přítomnost zpoždění je na druhou stranu komplikací při řešení těchto rovnic a příčinou mnoha odlišností od obyčejných rovnic, z nichž ty hlavní jsou v této práci popsané. Rovněž je ukázán princip použití diferenciálních rovnic se zpožděním při modelování růstu populací.

Abstract

Bachelor thesis focuses on the issue of differential equations with delay, which, unlike ordinary differential equations, contain in the unknown function argument the function of the so-called delay. Therefore, these are capable of a more exact description of certain real systems we want to convert into mathematic models. Practically, these are those systems where time delays, necessary for the reaction of the system to the change of status, occur. The presence of this delay, however, also complicates solution of such equations and sets further differences in comparison with ordinary equations. The crucial differences are described in this thesis. Also the principle is shown for the use of delay-differential equations in population growth models.

klíčová slova

Funkcionální diferenciální rovnice, diferenciální rovnice se zpožděním, metoda kroků, růst populací, logistická rovnice.

key words

Functional differential equations, differential equations with delay, method of steps, growth of populations, logistic equation.

KRÁČMAR, J.: *Diferenciální rovnice se zpožděním*, Brno, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011 (27 stran). Vedoucí bakalářské práce Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Diferenciální rovnice se zpožděním* vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Zdeňka Opluštila, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Jiří Kráčmar

Děkuji svému školiteli Mgr. Zdeňku Opluštilovi, Ph.D. za četné rady a připomínky při vedení mé bakalářské práce.

Jiří Kráčmar

Obsah

1 Úvod

Řešení matematických rovnic je nepopíratelně velmi širokým odvětvím z matematických disciplín. Ve spojení s diferenciálním počtem se dostáváme k velmi důležité oblasti matematické analýzy. Studium diferenciálních rovnic nám již několik desetiletí pomáhá porozumět spoustě praktických problémů z mnoha vědních oborů, jako například medicína a biologie, fyzika, strojní inženýrství nebo ekonomie, ale rovněž nám umožňují určitým způsobem tyto praktické problémy ovládat, tím pádem často zdokonalovat, pomocí řešení těchto rovnic a následné zpětné aplikace získaných poznatků na daný problém.

Mnohdy si vystačíme s obyčejnými diferenciálními rovnicemi (ODR), ale stále častěji se setkáváme se složitějšími praktickými problémy, u kterých popis pomocí obyčejných diferenciálních rovnic není dostačující. Především se jedná o modely, jejichž vývoj může být závislý nejen na okamžitém stavu, ve kterém se nachází, ale jsou ovlivňeny i minulým stavem. Tím se nám zde objevuje myšlenka auto-kontroly systému, která je daná díky zpětné vazbě. Ta se vyznačuje regulací vývoje nějakého systému za zachování stabilního stavu. Tím se dostáváme k tématu této bakalářské práce, protože diferenciální rovnice se zpožděním jsou používány právě pro tyto modely. Zpoždění je doba potřebná zpětnou vazbou k pocítění změny stavu systému a následné reakci na ni.

Diferenciální rovnice se zpožděním patří do větší skupiny rovnic tzv. funkcionální diferenciální rovnice (FDR), z tohoto důvodu o nich někdy mluvíme jako o funkcionálních diferenciálních rovnicích se zpožděním (FDR se zpožděním).

Pro řešení diferenciálních rovnic se zpožděním nelze obecně použít postupy jako při řešení obyčejných diferenciálních rovnic, to ale není zdaleka jediná odlišnost. Některé ze základních rozdílů jsou popsány v této práci stejně jako jedna ze základních metod pro výpočet, konkrétně metoda kroků. Po seznámení s tímto způsobem řešení diferenciálních rovnic a s několika vlastnostmi je ukázaná jejich aplikace na konkrétních praktických modelech.

2 Funkcionální diferenciální rovnice

Pro lepší porozumění problematiky diferenciálních rovnic se zpožděním a zkoumání jejich vlastností, je vhodné, se nejprve seznámit s nadřazenou skupinou rovnic, a to s funkcionálními diferenciálními rovnicemi. Tyto rovnice vzniknou složením funkcionálních a diferenciálních rovnic.

Za funkcionální rovnici (FR) považujeme rovnici, která obsahuje neznámou funkci různých argumentů, přičemž rozdíl mezi hodnotou argumentu neznámé funkce a parametrem t nazýváme *odchylkou argumentu*.

Definice 2.1. Rovnici ve tvaru

$$x(t) = f(t, x(t - h(t))), \tag{2.1}$$

kde f je reálná funkce definovaná na dvourozměrné oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, $h(t)$ je spojitá funkce definovaná na nějakém intervalu I, nazveme *funkcionální rovnice*. Výraz $(t - h(t))$ je *odchylka argumentu*.

Příkladem FR je například rovnice

$$x(5t) = x(2t) + x(3t).$$

Snadno se ověří, že jejím řešením je lineární funkce $x(t) = c(t)$. Dalšími příklady FR mohou být například tyto rovnice

$$\begin{gathered} x(3t) + 5x(2t) = 1, \\ x(t) = t^2 x(t+2) - x(t-3), \\ x(x(t)) = x(t) + 2. \end{gathered}$$

Nalézt obecné řešení těchto složitějších funkcionálních rovnic je obtížnější, resp. to vůbec nelze.

Obyčejná diferenciální rovnice je dána derivacemi nějaké funkce, kde řád nejvyšší derivace neznámé funkce nazýváme *řád rovnice*.

Definice 2.2. Rovnici, ve které se vyskytují derivace hledané funkce až do řádu n, nazýváme *obyčejnou diferenciální rovnici*, a má tvar

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t)), \tag{2.2}$$

kde n je *řád rovnice*, a f je reálná funkce definovaná na $(n+1)$-rozměrné oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

Řešením rovnice (2.2) rozumíme n-krát diferencovatelnou funkci $x(t)$ na nějakém intervalu I, splňující podmínky $[t, x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t)] \in \Omega$ a rovnici (2.2) pro $\forall t \in I$.

Poznámka. Pokud jsou všechny odchylky argumentů konstantní, FR nazýváme diferenční rovnice. Je-li FDR nultého řádu, lze ji chápat jako FR.

2.1 Problematika řešení

Je známo, že najít exaktní řešení ODR umíme jen pro speciální typy rovnic. Také kvalitativní vlastnosti ODR jsou prozkoumány jen pro úzkou třídu rovnic. Problematika řešitelnosti FDR je ještě složitější, zamysleme se např. jenom nad tím, na jakém intervalu je řešení FDR vůbec definované.

Uvažujme např. rovnici

$$\dot{x}(t) = kx(t-h), \tag{2.3}$$

kde $k, h = konst$ a $k \neq 0$. Nyní chceme najít řešení této rovnice na nějakém libovolném intervalu $\alpha \leq t \leq \beta$, tedy $x : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$, kde $\beta > \alpha + h$. Zde vzniká problém, protože pro $\alpha \leq t < \alpha + h$ není pravá strana rovnice definovaná, protože $t - h < \alpha$. Proto definujeme $x(t-h)$ z pravé strany rovnice pomocí *počáteční funkce* ϕ, která je definovaná na intervalu $\alpha - h \leq t < \beta$.
Tedy předpokládáme

$$x(t-h) = \phi(t-h) \text{ pro } t - h < \alpha.$$

Druhou možností, jak se vyhnout problému s pravou stranou, je, že řešení bude vyhovovat rovnici (2.1) pouze na intervalu $\alpha + h \leq t \leq \beta$. Řešitelností FDR se podrobněji zabývá [5].

3 Diferenciální rovnice se zpožděním

Jak je patrno již z úvodu, FDR se zpožděním mohou popisovat širokou oblast praktických i teoretických modelů, napříč různými vědními obory. Ať už to je technický, fyzikální nebo biologický model, tvar rovnice je závislý především na typu zpoždění, které může být reprezentováno jednoduchou konstatní funkcí nebo nekonstantní funkcí nějakého parametru. V komplikovanějších případech může zpoždění dokonce záviset i na samotném řešení a tedy je ve tvaru $h_i(t, x(t))$. V takovém případě se označují jako *autoregulativní.*

Z tohoto důvodu je praktické definovat obecný tvar FDR se zpožděním odpovídající přímo dané problematice. Pro moji bakalářskou práci budu tedy za FDR se zpoždením považovat rovnici podle následující definice.

Definice 3.3. Rovnici ve tvaru

$$x^{(m)}(t) = f(t, x^{(m_1)}(t - h_1(t)), ..., x^{(m_k)}(t - h_k(t))), \tag{3.4}$$

nazveme *funkcionální diferenciální rovnicí se zpožděním,* kde $m > m_i \geq 0$, $\forall i = 1, 2, ...k$, $h_i(t) \geq 0$ jsou daná spojité funkce zpoždění definované na nějakém intervalu I, a f je reálná funkce definovaná na $(k + 1)$-rozměrné oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^{k+1}$. Řešením rovnice (3.4) nazveme m-krát diferencovatelnou funkci $x(t)$ definovanou a spojitou na $\mathbf{R}$ a splňující rovnici (3.4).

3.1 Metoda kroků

Tato metoda je jednou ze základních metod pro řešení FDR se zpožděním. Princip spočívá v dělění intervalu, na kterém řešení hledáme, do subintervalů jejichž délka je dána velikostí zpoždění. Na těchto subintervalech potom hledáme části řešení, které jsou nakonec dohromady řešením na celém původním intervalu.

Aplikujme metodu kroků na rovnici

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - h)), \tag{3.5}$$

pro $t \geq t_0$, $h = konst > 0$. Nechť $f : [t_0, \infty) \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ je spojitá funkce. Počáteční funkce na intervalu $[t_0 - h, t_0]$ je nějaká daná funkce $\phi(t - h)$, na tomto intervalu spojitá, a dále nechť platí počáteční podmínka $\phi(t_0) = x(t_0)$.

Nyní provedeme první krok. Ten spočívá v nalezení řešení na intervalu $[t_0, t_0 + h]$, protože pro $t_0 \leq t \leq t_0 + h$ platí, že $t - h \in [t_0 - h, t_0]$. V pravé straně rovnice tedy za $x(t - h)$ dosadíme $\phi(t - h)$ a získáme tak ODR

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \phi(t - h)),$$

kterou můžeme řešit. Dostaneme tedy řešení na intervalu $[t_0, t_0 + h]$, které je definované i v bodě $t_0 + h$, z čehož nám plyne počáteční podmínka pro následující krok.

Ve druhém kroku hledáme řešení na intevalu $[t_0+h, t_0+2h]$. Potom $t-h \in [t_0, t_0+h]$, a tedy $x(t_0-h)$ je již definovaná, známá z prvního kroku a tedy se stává počáteční funkcí pro krok druhý. Rovnice (3.5) se opět změní na ODR, kterou řešíme s počáteční podmínkou, která vyplývá z rovnosti řešení z prvního a druhého kroku v bodě t_0+h. Tímto způsobem postupujeme v dalších krocích, dokud nedostaneme řešení na požadovaném intervalu (viz [5]).

K získání řešení FDR se zpožděním pomocí této metody je nezbytné znát nejen počáteční podmínky jako u řešení ODR, ale podstatná je především znalost počáteční funkce, definované na intervalu o délce rovné danému zpoždění. Tomuto a dalším rozdílům oproti ODR se bude věnovat kapitola 3.4. Metoda zároveň vyžaduje schopnost nalezení řešení příslušných ODR.

3.2 Příklad

Hledáme řešení rovnice

$$\dot{x}(t) = 2x(t-5), \tag{3.6}$$

s počáteční podmínkou $\phi(t) = 1$ pro $t \leq 0$.

3.2.1 Řešení pomocí metody kroků

Pro názornost postačí provést tři kroky, řešení tedy budeme hledat na intervalu $[0, 15]$. Z rovnice vidíme, že zpoždění je konstantní a jeho velikost je $h = 5$, což bude rovněž parametr pro dělení subintervalů v jednotlivých krocích.

První krok, $t \in [0, 5]$: $\dot{x}(t) = 2 \cdot \phi(t) = 2 \cdot 1 = 2$
Obecné řešení: $x_1(t) = 2t + c_1$
Počáteční podmínka: $1 = 2 \cdot 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 1$
Partikulární řešení: $x_1(t) = 2t + 1$
Nyní ještě potřebujeme vypočítat hodnotu $x_1(t)$ pro $t = 5$, kterou použijeme jako poč. podmínku ve druhém kroku.
$x_1(5) = 11$

Druhý krok, $t \in [5, 10]$: $\dot{x}(t) = 2 \cdot x_1(t) = 2(2(t-5)+1) = 4t - 18$
Obecné řešení: $x_2(t) = 2t^2 - 18t + c_2$
Počáteční podmínka: $11 = 2 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 + c_2 \Rightarrow c_2 = 51$
Partikulární řešení: $x_2(t) = 2t^2 - 18t + 51$
$x_2(10) = 71$

Třetí krok, $t \in [10, 15]$: $\dot{x}(t) = 2 \cdot x_2(t) = 2(2(t-5)^2 - 18(t-5) + 51) = 4t^2 - 76t + 382$
Obecné řešení: $x_3(t) = \frac{4}{3} \cdot t^3 - 38t^2 + 382t + c_3$
Počáteční podmínka: $71 = \frac{4}{3} \cdot 10^3 - 38 \cdot 10 + 382 \cdot 10 + c_3 \Rightarrow c_3 = -1282,3$
Partikulární řešení: $x_3(t) = \frac{4}{3} \cdot t^3 - 38t^2 + 382 - 1282,3$

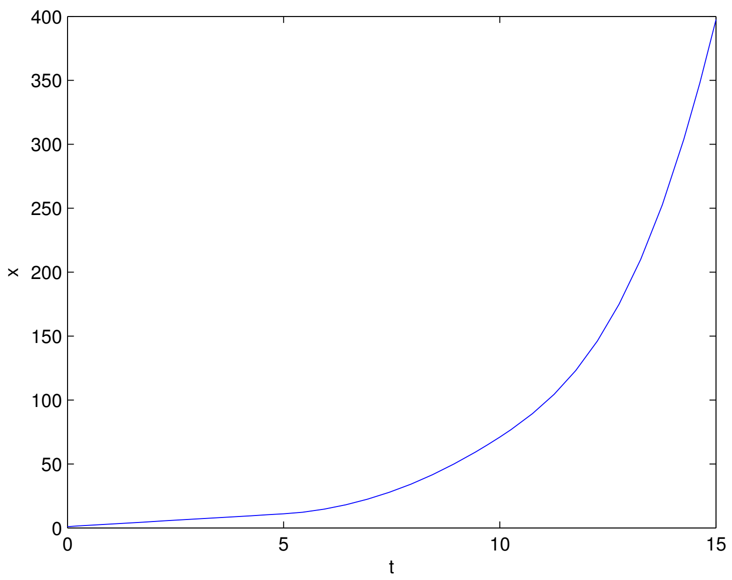
3.2.2 Řešení v programu Matlab

Program Matlab obsahuje ve své knihovně mnoho funkcí užitečných pro výpočty různých typů rovnic. Jinak tomu není ani v případě FDR se zpožděním, kde máme k dipozici například funkci *dde23*. Velkou výhodou použití programu Matlab je okamžité vykreslení řešení rovnice do grafu.

Ve funkci s názvem *rovnice* zadávám rovnici, jejíž řešení hledám. Samotné výpočty se provádí pomocí cyklu, kdy do každého kroku vstupují hodnoty z předchozího. Výjimka se musela deklarovat pro první krok, kde se musí použít počáteční hodnoty dané ze zadání. Do proměnných *lag, k, PP* zadávám hodnotu zpoždění, počet kroků a počáteční podmínku.

```
function dydt = rovnice(t,y,Z)
  ylag = Z(:,1);
  dydt = 2*ylag;
end

lag = 5;
k = 3;
PP = 1;
for n = 1:k
    if n == 1
    sol = dde23(@rovnice,lag,PP,[n*lag,(n+1)*lag]);
    else
    sol = dde23(@rovnice,lag,sol,[n*lag,(n+1)*lag]) ;
    end
end
```



Obrázek 1: Řešení rovnice (3.6)

3.3 Vytvoření matematického modelu

Princip zpoždění lze názorně ukázat pomocí modelu popisující sprchujícího se člověka, který chce pomocí otáčením kohoutku vodovodní baterie dosáhnout určité teploty vody, kterou označíme T_k ($T_k = konst$). Změna teploty vody ΔT ve výstupu baterie je úměrná otočení kohoutku o úhel $\Delta\alpha$ s koeficientem k. Nechť $T_b(t)$ je teplota vody na výstupu baterie v čase t, a $h = konst$ je čas potřebný k přemístění vody z místa výstupu baterie na hlavu sprchujícího se člověka.

Předpokládejme, že rychlost otáčení kohoutku je úměrná k rozdílu teploty vody od požadované teploty T_k s koeficientem κ, jehož velikost závisí na povaze člověka. Protože v čase t člověk cítí teplotu vody opouštějící baterii v čase t-h, dostaneme následující rovnici

$$\dot{\alpha}(t) = -\kappa[T_b(t-h) - T_k]. \tag{3.7}$$

Odtud přes první zmíněnou závislost získáme rovnici pro teplotu vody na výstupu z baterie T_b

$$\dot{T}_b(t) = -k\kappa[T_b(t-h) - T_k], \tag{3.8}$$

která je typickým zástupcem FDR se zpožděním.

Z tohoto modelu (podrobně popsaného např. v [5]) lze tedy vidět, jak může být vývoj přítomného stavu nějakého procesu ovlivněn stavem v minulosti.

3.4 Srovnání FDR se zpožděním a ODR

Vzhledem k tomu, že FDR se zpožděním, narozdíl od ODR, popisují určitý stav systému, který je ovlivňován jeho stavem na předcházejícím časovém úseku, můžeme předpokládat mnohem větší obtížnost při zkoumání právě FDR se zpožděním, ať už se budeme bavit o řešení vzhledem k počátečním podmínkám, existenci a jednoznačnosti řešení, či stabilitě.

Co konkrétně považujeme za ODR jsme si již připomněli v definici 2.2. Odlišnost ODR od FDR se zpožděním můžeme pozorovat už ve velmi triviálním případě. Vezměme si například lineární ODR prvního řádu s počátěční podmínkou

$$\frac{dx}{dt} = kx, \ x(0) = 1. \tag{3.9}$$

Řešení této počáteční úlohy dostaneme jednoduše pomocí separace proměnných:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= kdt \\ \int \frac{dx}{x} &= \int k \, dt \\ \ln x &= kt + c \\ x(t) &= \exp(kt) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Díky počáteční podmínce nyní můžeme vypočítat hodnotu řešení, v jakémkoliv čase $t > t_0 = 0$, a minulost řešení nám ji nijak neovlivní.

Triviální řešení (3.10) se zkomplikuje přidáním časového zpoždění $h = konst$ do pravé strany rovnice (3.9). Dostaneme následující FDR se zpožděním

$$\frac{dx}{dt} = kx(t-h),\ x(t) = 1 \tag{3.11}$$

pro $-h \leq t < 0$. Místo hodnoty řešení definovaného v počátečním bodě zde jako počáteční podmínku máme funkci definovanou na konečném intervalu. U této rovnice můžeme pozorovat, narozdíl od rovnice (3.9), že může být oscilující. K této vlastnosti se vrátím po zmínění následující myšlenky.

Poznámka. Podívejme se nyní v rychlosti na zajímavou vlastnost funkcí $\sin(t)$ a $\cos(t)$. Z jejich grafu lze vidět, že jsou od sebe vzájemně posunuty o nějaké násobky čísla π, navíc známe vztah mezi nimi a jejich derivacemi:

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \sin(t - \frac{3}{2}\pi) \\ \frac{d}{dt}\sin(t) &= \cos(t) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Pokud tedy zvolíme $x(t) = \sin(t)$, tak v souladu s vlastnostmi (3.12) vyhovuje $x(t)$ rovnici $x'(t) = x(t - \frac{3}{2}\pi)$. Tyto funkce jsou proto zajímavé ve zkoumání FDR se zpožděním.

Vraťme se tedy nyní k rovnici (3.11) a dosaďme do ní (podobně jako v [3]) partikulární řešení

$$x(t) = A\sin(\omega t). \tag{3.13}$$

Po dosazení dostaneme

$$\omega A\cos(\omega t) = kA\sin(\omega t - \omega h) = kA[\sin(\omega t)\cos(\omega h) - \cos(\omega t)\sin(\omega h)].$$

Položme popořadě $\omega t = 0$ a $\omega t = \pi/2$, potom

$$\omega A \cdot 1 = kA[0 \cdot \cos(\omega h) - 1 \cdot \sin(\omega h)]$$

a

$$\omega A \cdot 0 = kA[1 \cdot \cos(\omega h) - 0 \cdot \sin(\omega h)].$$

Odtud dostaneme dvě podmínky

$$\begin{aligned} \omega &= -k\sin(\omega h) \\ 0 &= \cos(\omega h) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Druhá podmínka platí pro $\omega h = \pi/2$ nebo $\omega h = 3\pi/2$. Pro první podmínku jsou tyto dvě možnosti:

1. $\omega h = \pi/2$ a $kh = -\pi/2$
2. $\omega h = 3\pi/2$ a $kh = -3\pi/2$

Tedy pro tyto hodnoty kh, má rovnice (3.11) harmonické řešení (3.13).

Uvažujme nyní podobnou úlohu jako v (3.9), s napohled nepodstatnými změnami v rovnici i počátečních podmínkách

$$\frac{dx}{dt} = -x, \; x(0) = 0. \tag{3.15}$$

Ukažme, že tato úloha má jediné řešení a tím pádem je jednoznačně zadaná.

$$\frac{dx}{x} = -dt$$

$$\ln|x| = -t + c$$

$$x = e^{-t+c}$$

Po dosazení počáteční podmínky vidíme, že jediné možné řešení je nulové.

$$0 \neq e^c \;\Rightarrow\; x(t) = 0$$

Nyní převeďme stejnou úlohu do oblasti FDR se zpožděním tím, že do pravé strany rovnice (3.15) přidáme konstantní zpoždění $h = \pi/2$

$$\frac{dx}{dt} = -x(t - \frac{\pi}{2}), \; x(0) = 0. \tag{3.16}$$

V tomto případě je opět řešením nulové řešení $x(t) = 0$, ale navíc je úloha (3.16) splněna i pro $x(t) = \sin t$, protože při dané počáteční podmínce platí

$$\cos 0 = -\sin(0 - \frac{\pi}{2}).$$

Jednoznačnost lze zařídit nahrazením bodové počáteční podmínky pomocí počáteční funkce. Nabízí se nám volba $\phi(t-h) = \cos t$ na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, 0]$. Potom pomocí metody kroků je

$$\frac{dx}{dt} = -\cos t$$

$$x(t) = \sin t + c$$

a měla by platit podmínka $\phi(t_0) = x(t_0)$ pro $t_0 = 0$, tedy platí

$$\cos(0 - \frac{\pi}{2}) = \sin 0 + c$$

$$0 = 0 + c \;\Rightarrow\; c = 0.$$

Volba počáteční funkce v tomto případě byla úspěšná, díky tomu dostaneme jedniné řešení $x(t) = \sin t$. Tento příklad dokazuje důležitost počáteční funkce při hledání řešení diferenciálních rovnic a nutnost její znalosti pro jednoznačnost řešení.

Z toho plyne i další zásadní odlišnost FDR se zpožděním od ODR. V praxi tento problém může vypadat následovně. Předpokládejme, že jsme pomocí nějakých pozorování systému sestavili rovnici (FDR se zpožděním), která tento systém popisuje a budeme chtít podle jejího řešení predikovat vývoj systému v budoucnosti. Exaktní řešení nemusíme být vždycky schopni exaktně spočítat, ale v některých případech můžeme řešení odhadnout. Problém nastane v případě nejednoznačnosti a nám se podaří odhadnout více možných řešení, potom neznalost počáteční funkce nám znemožní správnou predikci vývoje daného systému.

3.4.1 Cauchyho úloha

Definice 3.4. (Cauchyho úloha pro ODR) Mějme libovolný, ale pevně daný bod $(t_0, x_0, x_1, ..., x_{n-1})$. Úloha určit řešení rovnice (2.2), které vyhovuje *n počátečním podmínkám*

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, ...,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \tag{3.17}$$

se nazývá *Cauchyho úloha* (rovněž *počáteční úloha*). Řešením této Cauchyovy úlohy je stejná funkce $x(t)$, která je uvedena jako řešení rovnice (2.2), splňující podmínku (3.17).

V případě ODR je řešení, zavislé na čase, jednoznačně definováno svým počátečním stavem v daném momentě. To u řešení FDR se zpožděním obecně neplatí. K vyřešení počáteční úlohy a tedy k nalezení řešení potřebujeme znát navíc tvar řešení na intervalu jehož délka je rovna danému zpoždění. Formulace Cauchyho úlohy pro FDR se zpožděním můžeme tedy definovat následovně s využitím poznatků z [5].

Definice 3.5. (Cauchyho úloha pro FDR se zpožděním) Počáteční problém pro FDR se zpožděním je úloha určit řešení následující rovnice vyhovující daným podmínkám

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t(\theta)); \quad x_t(\theta) := x(t-\theta), \quad -h \leq \theta \leq 0, \tag{3.18}$$

$$x_{t_0} = \phi, \tag{3.19}$$

kde h je tentokrát konečné konstantní zpoždění, $t_0 \in \mathbf{R}$, $\phi : [-h, 0] \to \mathbf{R}$. Funkci $x(t)$ nazveme řešením této úlohy, jestliže je definovaná na intervalu $[t_0 - h, t_0 + A]$ pro $A > 0$, a splňuje rovnici (3.18) a podmínku (3.19) na intervalu $[\mathrm{t}_0, t_0 + A]$.

3.4.2 Existence a jednoznačnost řešení

V souvislosti s ODR jsou o existenci a jednoznačnosti řešení známé především dvě věty, a to *Peanova* a *Picardova*, obě jsou dokázany např. v [4].

Věta 3.6. (Peanova) Nechť funkce $f(t, x(t), x'(t), ..., x^{n-1}(t))$ z rovnice (2.2) je spojitá v oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ obsahující ve svém vnitřku bod $(t_0, x_0, x_1, ..., x_{n-1})$. Potom existuje alespoň jedno řešení počátečního problému (3.17), které je definované a spojité v nějakém okolí bodu t_0.

Věta 3.7. (Picardova) Nechť funkce $f(t, x(t), x'(t), ..., x^{n-1}(t))$ z rovnice (2.2) je spojitá v oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ obsahující ve svém vnitřku bod $(t_0, x_0, x_1, ..., x_{n-1})$. Dále nechť má funkce f v každém bodě Ω parciální derivaci $\partial f / \partial x$, která je na Ω ohraničená. Potom existuje jediné řešení počátečního problému (3.17), které je definované a spojité v nějakém okolí bodu t_0.

Podmínky existence a jednoznačnosti řešení pro FDR se zpožděním shrneme v následující větě uvedené a dokázané v [5].

Věta 3.8. *Nechť* $\phi \in C([-h,0],\mathbf{R})$ a funkcionál $f : D_h \to \mathbf{R}$ je spojitý a splňuje v nějakém okolí každého bodu $(t,u) \in D_h := [t_0,\infty] \times C([-h,0],\mathbf{R})$ Lipschotzovu podmínku ve druhém argumentu. Potom existuje $t_\phi = t_{\phi,t_0,f} \in [t_0,\infty)$ takové, že:

1. existuje řešení $x(t)$ počáteční úlohy (3.18),(3.19) na intervalu $[t_0,t_\phi]$;

2. v každém intervalu $[t_0,t_1] \subset [t_0,t_\phi)$ je toto řešení jediné.

Věta 3.8. je obdobou *Peanovy* a *Picardovy* věty pro FDR se zpožděním. Na první pohled lze vidět větší složitost oproti ODR. Je to z důvodu, že pro FDR se zpožděním je třeba silnějších podmínek než pro ODR. Kde si u ODR vystačíme s podmínkami pro funkci, u FRD se zpožděním je nutné definovat podmínky pro funkcionál, protože u ODR stačí platnost daných podmínek pouze v bodech t, zatímco u FDR se zpožděním můsíme zohlednit vliv počáteční funkce pro $t_0 - h < t < t_0$. Tedy zavedeme body (t,u), které pro každý t mají přiřazenou funkci $\phi \in C([-h,0],\mathbf{R})$. V těchto bodech potom vyžadujeme podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení FDR se zpožděním.

4 Aplikace diferenciálních rovnic se zpožděním

V kapitole 3.3 jsme si ukázali model, který je popsán FDR se zpožděním a zároveň jsme si pomocí něj uvědomili praktický význam zpoždění, ale FDR se zpožděním se nám nabízí v daleko více případech a hlavně v případech z vědního hlediska mnohem významnějších, než sprchující se člověk. Ukažme si nyní využití několika příkladů z fyziky a strojního inženýrství.

4.1 Stabilita závěsu jeřábu

Představme si například přístavní jeřáb, který se používá k nakládání a vykládání velkých kontejnerových přepravních lodí, kde rychlost ovlivňuje objem zisku. Proto musí jeřáb pracovat efektivně, což vyžaduje rychlé přemístění nákladu. Zde vzniká problém, pokud se rameno jeřábu bude pohybovat s velkými zrychleními, způsobí kyvadlový efekt, který může vést ke ztrátě kontroly nad pohyby nákladu. Tomu se v praxi snažíme zabránit použitím vhodných materiálů závěsu a především jeho konstrukcí. Tento model popisuje rovnice

$$x'' + \varepsilon x' + \sin(x) = -k\cos(x)(x(t-h) - x), \tag{4.20}$$

kde x představuje úhel vychýlení závěsu od svislé osy, levá strana rovnice popisuje kyvadlový oscilátor a pravá strana je zpětná vazba. Zpoždění h zde vzniká kvůli opožděné pohybové reakci závaží za pohybem samotného ramene nebo závěsu jeřábu. To se promítá do ovládání, protože operátor jeřábu vníma aktuální stav závaží, který je dán akcí v předcházejícím časovém okamžiku. Když uvážíme, že x bude nabývat malých úhlů, potom pro rovnovážné řešení $x = 0$ platí

$$\begin{aligned} \sin(x) &\sim x, \\ \cos(x) &\sim 1, \end{aligned} \tag{4.21}$$

a rovnici (4.20) můžeme přepsat do tvaru

$$x'' + \varepsilon x' + x = -k(x(t-h) - x) \tag{4.22}$$

Dále pro malé hodnoty h můžeme položit $x(t-h) \sim x - \tau x'$ a dostaneme rovnici (4.1) ve tvaru

$$x'' + (\varepsilon - k\tau)x' + x = 0, \tag{4.23}$$

ve kterém je zpoždění h přítomné ve členu oscilace. Pokud je $k < 0$, pak tento člen roste se zpožděním umožnujícím rychle slábnutí oscilace. Tento model lze nalézt podrobněji popsán v [3] i s využitím fyzikálních rovnic.

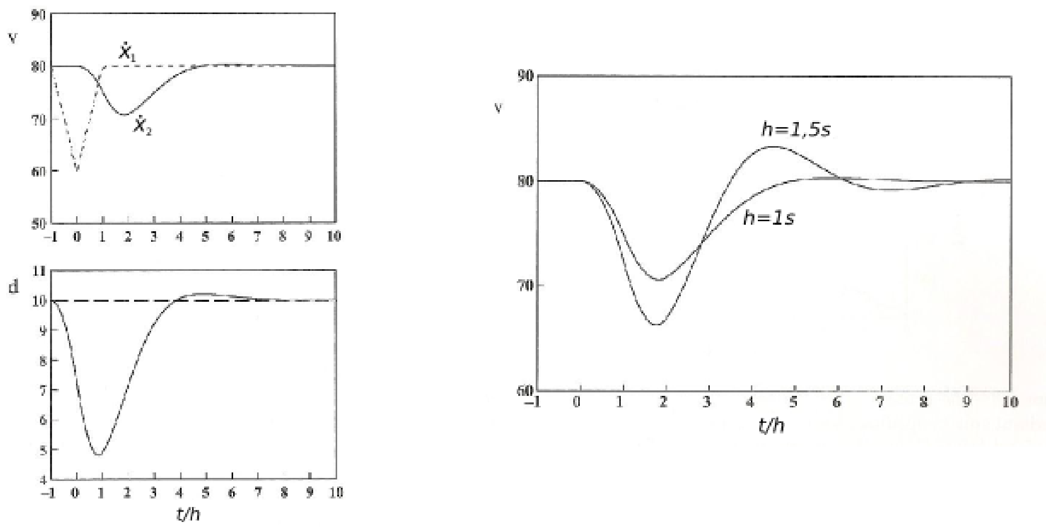
4.2 Plynulost dopravy

V dnešní době je doprava jakéhokoliv typu nedílnou součástí každodenního života většiny obyvatel téměř všech zemí světa. Ať už se jedná o osobní či nákladní dopravu, nejatraktivnější z hlediska využití FDR se zpožděním je automobilová doprava, využívající především rychlostní silnice a dálnice, kde předpokládáme vzájemnou interakci mnoha vozidel.

Následující rovnice ve tvaru

$$\ddot{x}_{n+1}(t+r) = \alpha(\dot{x}_n - \dot{x}_{n+1}), \tag{4.24}$$

odvozená např. v [3], popisuje závislost zrychlování (příp. zpomalování) následujícího vozidla na rozdílu jeho rychlosti a rychlosti vozidla předcházejícího s koeficientem α. Na změnu rychlostí řidič druhého vozidla reaguje se zpožděním o reakční dobu r, reakce na změnu rychlosti prvního řidiče v čase t tedy přicház až v čase $t+r$. Kdybychom pozorovali rozdíl vzdálenosti dvou vozidel, ukázalo by se, že průběh v čase by mohl být v určitých časových intervalech velmi nestabilní díky oscilaci, jejíž vznik podněcuje koeficient α. Ten totiž popisuje citlivost reakce řidiče. Pokud bude řidič zrychlovat a zpomalovat rychle (koeficient α bude velký), potom změna rychlosti předcházejícího vozidla vyvolá prudké změny v rychlosti následujícího, které se stabilizují až po určité době od odeznění iniciační změny.



Obrázek 2: Vlevo nahoře: Reakce druhého vozidla na změnu rychlosti prvního se zpožděním $h = 1s$. Vlevo dole: Změna vzdálenosti vozidel při $d_0 = 10m$, $\alpha = 0,5s^{-1}$, $h = 1$. Vpravo: Srovnání reakce rychlosti $\dot{x}_2$ na změnu $\dot{x}_1$ s delším zpožděním $h = 1,5s$, způsobující silnější oscilaci. (Obrázky použity z [3].)

5 Úvod do modelování růstu populací

Predikce vývoje populace nějakého druhu z nejen živočišné říše je v mnoha odvětvích biologie velmi duležitá. Jedním takovým příkladem může být model vývoje některých druhů bakterií v závislosti na podmínkách, ve kterých se vyskytují, další příklad můžeme najít i u pozorování populací chovných i divokých zvířat, jehož změny mohou být ovlivňovány například množstvím potravy, výskytem predátotů nebo plodností jedinců.

V mnoha případech si vystačíme pouze s ODR nebo diferenčními rovnicemi. Pro popsání komplikovanějších modelů, či složitějších stavů vývoje, jako napřiklad možné fluktuace v populacích, nám lépe poslouží FDR se zpožděním. Zde zpoždění může reprezentovat nějakou reakční dobu, jako je například doba obnovení zdrojů nebo perioda dozrávání (dospívání).

Zaveďme si nyní základní označení.

Definice 5.9. Nechť $x(t)$ udává velikost populace v čase t, dále $b = konst$ je množství narozených jedinců a $d = konst$ množství jedinců zahynulých na časovém intervalu $[t, t + \Delta t]$. Potom platí

$$x(t + \Delta t) - x(t) = bx(t)\Delta t - dx(t)\Delta t. \tag{5.25}$$

Nyní upravíme rovnici (5.25) tak, že ji podělíme Δt a následně Δt aproximujeme nulou. Tím dostaneme základní rovnici popisující exponenciální růst populace

$$\frac{dx}{dt} = bx - dx = (b - d)x. \tag{5.26}$$

Řešení:

$$\frac{dx}{x} = (b - d)dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int (b - d)\, dt$$

$$\ln x = (b - d)t + c$$

$$x = e^{(b-d)t+c} = e^c \cdot e^{(b-d)t}$$

Partikulární řešení dostaneme, když budeme uvažovat počáteční podmínku $x(0) = x_0$, což v praxi znamená, že daná populace má na začátku pozorováni stav x_0. Dostaneme tedy řešení popisující stav populace v čase t

$$x(t) = x_0 \cdot e^{(b-d)t}. \tag{5.27}$$

Označme $(b - d) = r \implies x(t) = e^{rt}$. Parametr r tedy ovlivňuje růst nebo pokles populace, pokud je $r > 0$ nebo $r < 0$.

5.1 Logistická rovnice

Rovnice (5.26) a jí odpovídající řešení (5.27) mohou fungovat pouze pro krátké časové intervaly, protože populace nemůže neustále růst pro $t \to \infty$, z důvodu možného omezení nedostatkem zdrojů. Tento problém řeší *logistická rovnice*

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K}), \tag{5.28}$$

kde $K = konst > 0$ je maximální uživitelné množství populace.

Poměr $x : K$ v rovnici (5.28) tedy ovlivňuje vývoj populace. Pokud je množství zdrojů velké a v populaci není mnoho jedinců, platí $x << K$ a tedy $(x/K) \to 0$. Naopak pokud se počet jedinců blíží k počtu uživitelných jedinců K, nebo ho dokonce převyšuje, dochází v populaci k soupeření o potravu a následné stagnaci či poklesu populace.

Řešení rovnice (5.28):

$$\frac{dx}{dt} = r\left(x - \frac{x^2}{K}\right) = r\frac{xK - x^2}{K}$$

$$\frac{K}{xK - x^2}\, dx = r\, dt$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{K - x}\right) dx = \int r\, dt$$

$$\ln x - \ln(K - x) = rt + c$$

$$\frac{x}{K - x} = e^{rt} \cdot e^{c}$$

$$x = Ke^{rt}e^{c} - xe^{rt}e^{c}$$

$$x + xe^{rt}e^{c} = Ke^{rt}e^{c}$$

$$x = \frac{Ke^{rt}e^{c}}{1 + e^{rt}e^{c}} \tag{5.29}$$

Platí opět počáteční podmínka $x(0) = x_0$:

$$x(0) = \frac{Ke^{c}}{1 + e^{c}} = x_0 \;\Rightarrow\; x_0 + x_0e^{c} = Ke^{c} \;\Rightarrow\; e^{c} = \frac{x_0}{K - x_0}$$

Když dosadíme za e^c do obecného řešení (5.29) a provedeme několik úprav dostaneme partikulární řešení (5.30) rovnice (5.28):

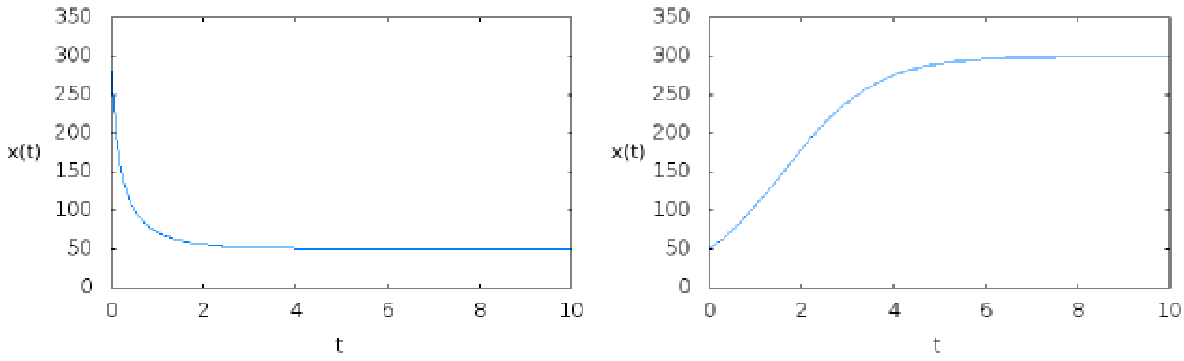
$$x(t) = \frac{Ke^{rt}\frac{x_0}{K-x_0}}{1 + e^{rt}\frac{x_0}{K-x_0}} = \frac{\frac{Kx_0e^{rt}}{K-x_0}}{\frac{K-x_0+x_0e^{rt}}{K-x_0}} = \frac{Kx_0e^{rt}}{((K - x_0)e^{-rt} + x_0)e^{rt}}$$

$$x(t) = \frac{x_0K}{x_0 - (x_0 - K)e^{-rt}} \tag{5.30}$$

V tomto případě je růst populace omezen, dokonce se model chová tak, jak by bylo očekáváno. Vypočítáme-li totiž limitu řešení (5.30), zjistíme že je pro $t \to \infty$ rovna hodnotě K, tedy počet jedinců v populaci nepřesáhne maximální možný stav z hlediska zdrojů.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_0K}{x_0 - (x_0 - K)e^{-rt}} = \left[\frac{x_0K}{x_0 - 0}\right] = K$$

Vidíme, že limita nezáleží na počáteční hodnotě x_0, takže omezenost vývoje hodnotou K platí jak pro případ $x_0 > k$, tak i pro $x_0 < K$. Tato skutečnost je dobře patrná i z grafu řešení (5.30), ze kterých si lze rovněž lépe udělat představu o vývoji modelu pro různé hodnoty x_0, K a případně r. Pro parametr r, který pro připomenutí udává rozdíl narozených a zahynulých jedinců za Δt, ovšem nastává v určitém případě problém. K tomuto problému se budu krátce věnovat až později. Nyní se podívejme na 2 základní případy pro $r > 0$.



Obrázek 3: Graf 1 (vlevo), Graf 2 (vpravo)

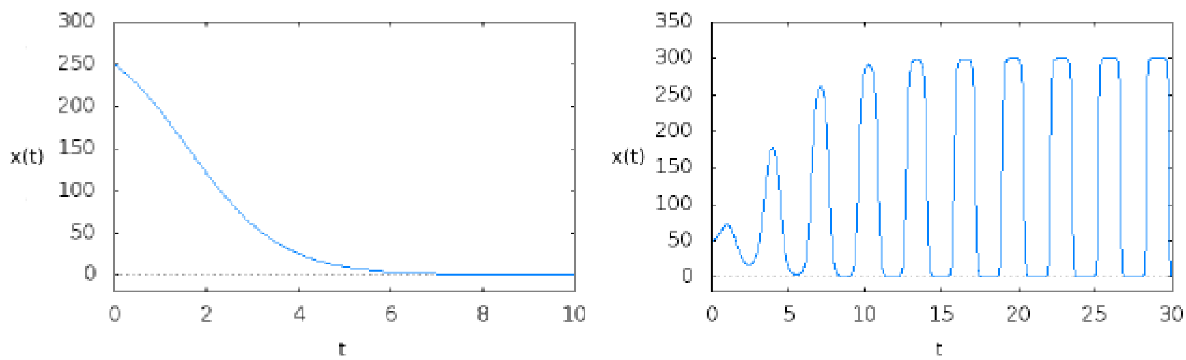
Pro jednoduchost a přehlednost je zvolen parametr $r = 1$. Tedy porodnost a úmrtnost je v populaci v podstatě vyrovnaná, pouze s malou převahou narozených jedinců. Graf 1 potom ukazuje vývoj, kdy počáteční stav $x_0 = 300$ převyšuje maximální možný stav $K = 50$, proto dochází k poklesu populace, který se ustálí až v momentě, kdy je aktuální stav blízký maximálnímu.

Druhý případ je popsán v grafu 2, kde populace začíná s velkou rezervou v počtu jedinců ($x_0 = 50$, $K = 300$). Dochází k dočasnému růstu populace, ale i ten je omezen hodnotou K. Ale i v tomto případě s volbou $x_0 < K$, může populace klesat, pokud se v ní bude rodit méně jedinců, než jich bude umírat. Potom $r = b - d < 0$ a limita řešení (5.30) bude rovna 0. Podmínka $x_0 < K \;\Rightarrow\; (x_0 - K) = -(K - x_0)$ je zde zásadní.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0)e^{rt}} = \left[\frac{x_0 K}{x_0 + \infty}\right] = 0$$

Snížení počtu jedinců potom není důsledkem nedostatku potravy, ale převažující mortalita nad natalitou. Tento případ je popsán v grafu 3 pro hodnoty $x_0 = 250$, $K = 300$ a $r = -1$.

Ve všech předchozích případech jsme předpokládali, že obnovování populace je neměnné s postupujícím časem ($r = konst$), to ale často nemusí platit. Parametr r může být rovněž funkcí času, která může být oscilující závislá například na nějaké časové období. Počet jedinců v populaci pak kolísá, jak jde vidět v grafu 4, kde $r = f(t) = 0.5 \sin 2t$.



Obrázek 4: Graf 3 (vlevo), Graf 4 (vpravo)

5.2 Logistická rovnice se zpožděním

Doposud bylo pro modelování populačního systému použito pouze ODR, speciálně *logistické rovnice* pokud jsme chtěli zahrnout omezenost růstu případně klesání pro $t \to \infty$. V těchto modelech je rychlost růstu populace v čase t závislá na velikosti populace ve stejném čase, což vyžaduje, aby proces reprodukce byl skoro okamžitý. To neplatí u většiny zástupců živočišné říše, kde obnovení generace je zpožděno o dobu reprodukčního cyklu, jako například líhnutí nebo doba březosti. Počet nových jedinců tedy není závislý na množství zdrojů v době příchodu na svět, ale už od začátku jejich prenatálního věku, tedy v okamžiku zplození. Tyto modely přesněji popsány pomocí FDR se zpožděním, nejčastěji pomocí tzv. *zpožděnou logistickou rovnicí*

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)\left[1 - \frac{x(t-h)}{K}\right], \tag{5.31}$$

pro kterou platí počáteční podmínka

$$x(\theta) = \phi(\theta) > 0, \quad \theta \in [-h, 0]. \tag{5.32}$$

Nyní se pojďme věnovat *stabilitě* řešení rovnice (5.31) s (5.32).

Definice 5.10. Řekneme, že řešení $x = x^*$ rovnice (5.31) je *stabilní*, pokud pro každé dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pokud $|\phi(t) - x^*| \leq \delta$ na intervalu $[-h, 0]$, potom všechna řešení $x(t)$ rovnice (5.31) s počáteční podmínkou ϕ na $[-h, 0]$ splňují $|x(t) - x^*| < \varepsilon$ pro všechna $t \geq 0$. Pokud navíc existuje $\delta_0 > 0$ takové, že $|\phi(t) - x^*| \leq \delta_0$ na $[-h, 0]$ implikuje $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$, potom řekneme, že řešení x^* je *asymptoticky stabilní.*

Uvažujme triviální řešení rovnice (5.31):

1. $x = 0$,
2. $x = K$.

Je zřejmé, že řešení $x = 0$ je nestabilní (i malé změny od x=0 už pro rovnici $dx/dt = rx$ ukazují, že je $x = 0$ nestabilní s exponenciálním růstem). V případě $x = K$ to tak jednoduché není. Nechť $X = x - K$, potom

$$\frac{dX}{dt} = -rX(t-h) - \frac{r}{K}X(t)X(t-h).$$

Tuto rovnici zlinearizujeme a dostaneme rovnici

$$\frac{dX}{dt} = -rX(t-h), \tag{5.33}$$

ke které hledáme řešení ve tvaru $X(t) = ce^{\lambda t}$, kde $c = konst$ a vlastní čísla λ jsou řešení charakteristické rovnice

$$\lambda + re^{-\lambda h} = 0. \tag{5.34}$$

Víme, že $x = K$ je *asymptoticky stabilní* (viz [1]), jestliže všechny vlastní čísla (5.34) mají zápornou reálnou část.

Položme za λ obecné komplexní číslo $\lambda = \mu + i\nu$, kde μ je reálná složka a ν imaginární. Když oddělíme reálnou a imaginární část charakteristické rovnice (5.34) dostaneme následující

$$\begin{aligned} \mu + re^{-\mu h}\cos\nu h = 0, \\ \nu - re^{-\nu h}\sin\nu h = 0. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Všimněme si, že když bude $h = 0$ charakteristický rovnice (5.34) přejde na tvar

$$\lambda + r = 0,$$

z čehož plyne $\lambda = -r < 0$. Ze spojitosti plyne, když λ přechází z hodnoty $-r$ na hodnotu takovou, že $Re\lambda = \mu > 0$ s rostoucím h, potom existuje nějaká hodnota $h = h_0$, pro kterou platí $Re\lambda(h_0) = \mu(h_0) = 0$. Potom zároveň musí charakteristická rovnice (5.34) mít dva komplexně sdružené kořeny $\pm i\nu_0$ pro $\nu_0 = \nu(h_0)$. V takové případě dostaneme

$$\cos\nu_0 h = 0,$$

což platí pro

$$\nu_0 h_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 1, 2, ...$$

Nahradíme-li $\nu_0 = r$, můžeme vyjádřit náš hledaný vztah (5.36) pro hodnotu $h = h_0$, ve které je $Re\lambda = 0$.

$$\begin{aligned} h_k = \frac{\pi}{2r} + \frac{2k\pi}{r}, \quad k = 1, 2, ... \\ h = h_0 = \frac{\pi}{2r} \end{aligned} \tag{5.36}$$

Všechny vlastní čísla rovnice (5.34) tedy mají zápornou reálnou část pro všechny hodoty h pro které platí $0 < h < \frac{\pi}{2r}$. Předcházející úvahy můžeme tedy shrnout do následující věty.

Věta 5.11. (Stabilita $x = K$)(viz [1])

1. Řešení $x = K$ je *asymptoticky stabilní*, pokud $0 \leq rh < \frac{\pi}{2}$.
2. Řešení $x = K$ je *nestabilní* pro $rh > \frac{\pi}{2}$.
3. V řešení $x = K$ dochází k *bifurkaci*, pokud $rh = \frac{\pi}{2}$. Pro $rh > \frac{\pi}{2}$ existují periodická řešení.

Poznámka. Logistická rovnice i logistická rovnice se zpožděním jsou hlouběji zkoumány v [6], kde jsou použity i při modelaci konkrétních systémů.

Pojem bifurkace znamená rozdvojení a není spjat pouze s matematikou. Například v zeměpisné terminologii může znamenat rozdvojení toků řek. V modelování dynamických systémů umožňuje dobře pozorovat různé varianty vývoje daného systému.

Matematickou podstatu bifurkace lze názorně ukázat na triviálním příkladě. Mějme rovnici

$$x^3 + cx = 0, \tag{5.37}$$

která má pro $c \geq 0$ jediné řešení $x = 0$. Pokud ale bude $c < 0$, platí

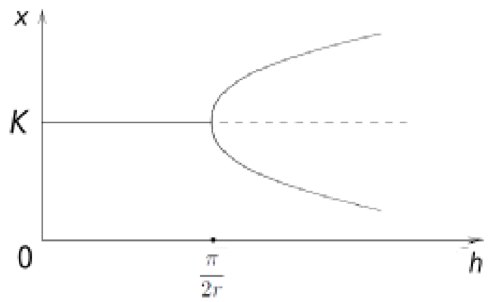
$$x^3 - cx = 0,$$

$$x(x^2 - c) = 0,$$

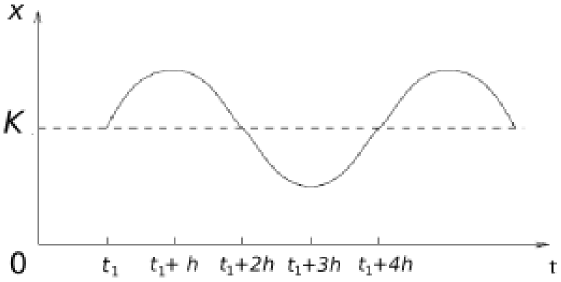
$$x(x + \sqrt{c})(x - \sqrt{c}) = 0.$$

Rázem dostaneme tři možná řešení $x = 0$, $x = -\sqrt{c}$, $x = -\sqrt{c}$ a můžeme říct, že u rovnice (5.37) nastává v bodě $c = 0$ bifurkace.

Velmi podobnou bifurkaci rovnice (5.31) vidíme na obrázku 5, která nastává pro hodnotu $h = \frac{\pi}{2r}$, jak je uvedeno na předchozí straně.



Obrázek 5: Graf bifurkace rovnice (5.31),[5].



Obrázek 6: Graf periodického řešení *zpožděné logistické rovnice* (5.31),[5].

6 Závěr

Z charakterizace diferenciálních rovnic se zpožděním a následného srovnání jejich vlastností s obyčejnými diferenciálními rovnicemi jednoznačně vyplynula skutečnost, že zkoumání FDR se zpožděním je v mnoha ohledech složitější než u obyčejných diferenciálních rovnic. Přítomnost zpoždění v argumentu neznámé funkce zásadně komplikuje řešitelnost úloh, která je v případě uvedené metody kroků podmíněná znalostí počáteční funkce. Na druhou stranu zpožděním vzniklé komplikace jsou vyváženy výhodami v přesnosti matematických modelů odvozených pomocí diferenciálních rovnic se zpožděním. Nepopřitelná skutečnost, že u mnoha reálných systémů, nejen technických, ale i přírodních, je jejich vývoj závislý na minulém stavu, je jasnou motivací pro další zkoumání těchto rovnic.

Reference

[1] Arino, O.: *Delay Differential Equations and Applications*, Springer, Berlin, 2006.

[2] Čermák, J.; Ženíšek, A.: *Matematika III*, CERM, Brno, 2006.

[3] Erneux, T.: *Applied Delay Differential Equations*, Springer, New York, 2009.

[4] Kalas, J.; Ráb, M.; *Obyčejné diferenciální rovnice*, MU, Brno, 1995.

[5] Kolmanovskii, V.; Myshkis, A.: *Introdiction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[6] Murray, J.D.: *Mathematical Biology I: An introduction*, Springer, New York, 2001.